

Las matemáticas medievales Europeas

M^a Isabel Barba. Cristina Varon. M^a Antònia Binimelis
Universitat de les Illes Balears

1 Introducción

La historia de nuestros antepasados está llena de evoluciones tanto sociales como políticas: desde los antiguos griegos y romanos con su sistema de Estado basado en la administración y con su población dividida entre esclavos y señores; hasta nuestros días, donde todos los hombres son iguales ante la ley y cada persona posee libre opinión.

El conocimiento no iba a ser menos y si nos fijamos atentamente observaremos que también podemos distinguir una transformación de la cultura a lo largo de la historia. Campos como la geografía, astronomía y la arquitectura han sido siempre tratados recibiendo su máximo auge entre las sociedades griegas y romanas. Las artes como la literatura y la pintura también evolucionaron con el paso del tiempo desde las obras clásicas hasta las creaciones más modernas. Y las matemáticas no iban a ser diferentes.

Las matemáticas siempre han estado presentes en la vida de las personas aunque no se hayan conocido con el mismo nombre. Los paleolíticos necesitaban contar, saber cuánto ganado habían conseguido o cuántos necesitaban cazar. Más adelante, los griegos bautizaron el ámbito de utilizar la racionalidad como *matemáticas* y desde entonces, se han ido profundizando y mejorando con la incorporación de teoremas o propiedades que han enriquecido el conocimiento. Sin embargo, el desarrollo de las matemáticas no ha sido equilibrado a lo largo del tiempo: destacamos un gran vacío en la Edad Media.

Durante este tiempo la sabiduría del momento atravesó por varias etapas: unas caracterizadas por la ausencia del estudio, y otras, por el interés en el conocimiento, en particular, en las matemáticas. Nos interesaremos en conocer los motivos por los cuales se produjo esta distinción. Sin ellos no seríamos capaces de comprender las matemáticas de hoy en día. ¿Cómo es posible que en 1.000 años de medievo consiguiéramos menos resultados que los griegos en 400? Para entender las causas, miraremos de conocer y entender la historia de los años anteriores a la Edad Media.

Antes de llegar los musulmanes a Europa, éstos conquistaban las zonas de Oriente. Debido a la gran extensión del territorio musulmán de la época, los islámicos tuvieron contacto con otras culturas desconocidas para la población de occidente. Por esta razón, cuando la península Ibérica fue invadida, los cristianos no sólo se enriquecieron con la cultura musulmana sino también con las culturas orientales.

Sin embargo, antes de llegar la sociedad musulmana, la población europea atravesaba momentos difíciles: el imperio Romano había desa-

parecido y con él toda la estructura socio-política creada hasta el momento. Se empezó entonces a difundir un pensamiento teológico y un deseo de supervivencia que antes no existía. La religión cobró fuerza y se transformó en el mayor pilar de la sociedad: cualquier acción, obra o estudio debía ser supervisada y consentida por la Iglesia.

La aparición de los islámicos en territorio europeo provocó un cambio en la mentalidad del momento. La religión perdió fuerza y el conocimiento volvió a resurgir. No sólo se preservaron obras griegas y romanas sino que creció el interés en la cultura fomentando el estudio de diversas áreas como las matemáticas. No podemos destacar a un sólo matemático, ya que fueron varios los personajes que aportaron su influencia en este ámbito. Gracias a ellos, las matemáticas se enriquecieron con el paso del tiempo. Por este motivo, todos son igual de importantes y en mayor o menor grado, veremos todas sus aportaciones en las matemáticas.

A partir de entonces, distinguimos una nueva etapa en la era medieval caracterizada por el auge de las ciencias y particularmente de las matemáticas, donde destacamos a grandes personajes como Luca Pacioli, Fibonacci o Ramon Llull.

2 Antecedentes

La época anterior a la Edad Media se denomina Edad antigua. Una edad que abarca bastantes siglos: desde el conocimiento de las primeras ciudades de la historia, en el 2.000 a.C. aproximadamente, hasta la caída del imperio Romano de Occidente, en el siglo V d.C. Para este trabajo nos interesan únicamente las civilizaciones griegas y romanas que surgieron al final de esta etapa. Analizaremos sus formas de vida y veremos cuán importantes fueron las matemáticas en cada periodo.

La civilización griega nació en la isla de Ítaca y se caracterizó por su sistema de sociedad, su cultura y su perfección en las artes, campos que destacaron e influyeron en toda la Europa Occidental sirviendo de ejemplo posteriormente a los hombres del Renacimiento. No se sabe mucho de la población griega antes del S.VIII a.C. pero la información conocida en los siglos siguientes basta para entender las formas de vida del mundo helénico.

Los griegos del S.VIII basaban su día a día en la agricultura. La unidad política era la polis (término que significa ciudad) formado por un grupo de personas que no admitían someterse a ninguna otra civilización y su forma de gobierno, la democracia. Más adelante, en otras ciudades como Atenas, se desarrollaron otras actividades relacionadas

con el comercio (mar Mediterráneo) y la población empezó a interesarse por el teatro. El arte griego alcanzó su máximo en el S.V a.C. En el reinado de Alejandro Magno se contruyeron muchas carreteras y canales de riego. Más adelante, la astronomía destacaba gracias a Ptolomeo con su modelo geocentrista, y la medicina y la geografía experimentaron grandes evoluciones. Las matemáticas resaltaban con autores como Thales de Mileto, Pitágoras de Samos, Euclides y Arquímedes. Todos ellos desarrollando unas matemáticas basadas en la geometría: se ajustaban a la realidad y necesitaban la representación de figuras para elaborar teoremas propiedades.

Thales de Mileto fue uno de los siete sabios de Grecia que desarrolló la geometría. Fue capaz de predecir un eclipse con total exactitud. Además, ayudaba al faraón. *Se dice que el faraón le pidió calcular la altura de una pirámide, entonces, Tales se apoyó en su bastón, y esperó. Cuando la sombra del bastón fue igual de larga que el propio bastón, le dijo a un servidor del faraón: Corre y mide rápidamente la sombra de la Gran Pirámide. En este momento es tan larga como la propia pirámide.*

Pitágoras inventó una tabla de multiplicar, estudió la relación entre la música y las matemáticas y, por supuesto, creó el teorema que lleva su nombre. De hecho a partir de la Edad Media, el teorema de Pitágoras fue considerado como el teorema más importante del momento.

Euclides destacó por su obra *Los elementos de Euclides*. Es tal la importancia que ha tenido a lo largo de la historia que en Inglaterra se utiliza como texto escolar.

Arquímedes destacó en varios campos. En matemáticas, descubrió la relación entre la superficie y el volumen de una esfera y el cilindro que la circunscribe. Se dice que debido a ello, Arquímedes ordenó que sobre su tumba figurase una esfera inscrita en un cilindro. Además, es famoso por su expresión *eureka* grito de triunfo que le obligó a saltar del baño cuando descubrió el principio de flotación de los cuerpos y por el descubrimiento de número pi.

Todo el mundo occidental pudo disfrutar de la cultura griega y ello quedó reflejado en las obras literarias de la época. La religión siempre estuvo presente en la sociedad, la figura humana fue la protagonista en el arte y la literatura constituyó el campo mejor trabajado. Sin embargo, dónde más destacaron los griegos fue en el ámbito filosófico deseando encontrar una explicación del mundo.

Sin embargo, a pesar de que Grecia poseía una gran unidad política no se podía comparar a la establecida en Roma. Los romanos fueron capaces de establecer tal Estado que pudieron controlar a los habitantes

de Oriente y de Occidente creando así el gran Imperio Romano.

En el año 509 a.C, los romanos se rebelaron contra los etruscos y empezaron a crear grandes ciudades basadas en la República dividiéndose los poderes entre los cónsules y el Senado. A partir de ese momento, creció en Roma el espíritu de expansión y en el 275 a.C ya ocupaban todo el Mediterraneo Occidental. Sin embargo, la adquisición de tierras y bienes desembocó en un deseo de ambición que traicionó a Roma provocando una violencia sin control en los próximos 100 años de República.

Varios emperadores dominaron Roma y bastantes fueron los casos de asesinato que se encontraron. Sólo el reinado de Augusto (hasta el 14d.C) supuso una mejora para la población, hasta su muerte. Otra figura destacable fue la de Trajano, quien el año 100 d.C pacificó diversas áreas del imperio Romano y quien mandó construir carreteras, acueductos y puentes. Se estimuló el comercio y se crearon colonias. Sin embargo, su éxito sólo se llevó a cabo en Occidente, no en Oriente. Seguidamente, Adriano reactivó la economía y mejoró las infraestructuras a la vez que creó un sistema burocrático bastante sólido.

Los siguientes años se vieron caracterizados por los problemas con los judíos, los bárbaros y los cristianos. En el 313 d.C Constantino dividió su imperio entre sus dos hijos surgiendo así el Imperio Romano de Oriente y el de Occidente, con sistemas políticos totalmente independientes. Roma perdía fuerza. El 476 d.C supuso el fin para el Imperio Romano de Occidente y el Imperio Romano de Oriente duró hasta el 1453, con la caída de Constantinopla.

Durante los siglos que perduró el Imperio, los romanos supieron aprovechar la cultura heredada de los griegos y crear nuevos elementos. Los romanos destacaron sobre todo por su arquitectura creando nuevas técnicas como la bóveda y el arco que ayudaron a la construcción de carreteras, acueductos, coliseos, anfiteatros... y autores como Ovidio o Tito Livio elevaron el latín a su máximo esplendor. Las ciencias evolucionaron a partir de los conocimientos griegos pero no siendo tan abstractas sino más prácticas: para dar respuesta a los fenómenos que observaban. De ahí que la astronomía se dejase a un lado y se centraran en la medicina o en la geografía. Las matemáticas no destacaron demasiado.

El legado Romano perduró durante toda la Edad Media. Sin embargo, es en el Renacimiento cuando se vuelven a recuperar los ideales clásicos y la cultura griega y Romana alcanzan de nuevo su máximo esplendor.

3 Temprana Edad Media

Con la caída del Imperio Romano de Occidente la situación social cambió radicalmente. Los romanos desaparecieron por completo y con ellos, toda la sólida estructura de gobierno, tribunales y administración que tantos siglos había perdurado. La sociedad se quedó sin representantes legales y sin defensores. Las ciudades carecían de sentido al no existir un sistema de comunicación efectivo. En definitiva, la política romana desapareció dejando desamparada la sociedad del momento. Y no sólo eso, la cultura romana dejó de existir.

Había pues que buscar otras maneras, quizá menos inteligentes y no tan avanzadas, de subsistir: el nuevo gobierno se basaba en tribus guerreras. Empezaron a surgir así los señores feudales: personajes con gran poder económico a cargo de un gran territorio, los esclavos: los menos favorecidos que trabajaban para estos señores labrando sus tierras o sirviendo a su familia, y los guerreros: que luchaban en invasiones prestando juramento y fidelidad al señor por siempre. El líder poseía grandes botines y propiedades que iba aumentando conforme conquistaba otras tierras demostrando así quién mandaba. La ley romana fue sustituida por la ley tribal.

Así pues, en la sociedad se empezó a distinguir no ciudades, sino pequeños reinos cuya mayor preocupación era el poder. Ahora bien, gobernar no era tan fácil: las comunicaciones eran pobres, el comercio atravesaba su peor momento y la administración había desaparecido, y con ella los sabios letrados. La preocupación de la sociedad ya no era interesarse por el mundo que le rodeaba para conocer más de él sino trabajar para poder ganar el pan de cada día: sobrevivir. La vida era dura y la esperanza de vida se había rebajado a los 30 años. La población del momento se dedicaba a la agricultura y no tenía tiempo para estudiar.

Sólo en los monasterios se conservaban libros. Los cultos pasaron a ser los hombres de fe: clérigos y monjes que, reclusos en sus centros, trataban textos de la antigua Grecia y Roma copiando libros a mano. Se producía así una recuperación de las obras griegas y romanas. La cultura estaba en manos de la religión.

Debido a la pobre situación del momento, empezó a crecer la fe en la sociedad. El deseo de una vida mejor, de no perder a sus seres queridos en las batallas, la esperanza de un cambio... La religión se volvió más importante que cualquier ciencia. Además, tras el caos, la única estructura que se mantenía sólida era la iglesia. Fue entonces cuando el clero cobró fuerza. Por ello esta época recibe el nombre de "*Edad de Oro Temporal de la Iglesia*" caracteriza por la influencia de la religión en la sociedad y en el poder político. Tanto era así que los

textos que se enseñaban en las escuelas eran revisados anteriormente por la Iglesia. Pero es que ellos eran los únicos capacitados para tal acción.

Por todos estos motivos, se piensa que la Edad Media fue una época "Oscura". Las ciencias pasaron a un segundo plano dejando espacio a la religión. No hubo avances matemáticos y ciencias como la física pasaron a ser prohibidas por no promulgar las creencias cristianas. Cualquier persona interesada en las ciencias era considerada como un brujo y podía ser condenado a muerte.

Así pues, no es de extrañar que las matemáticas en este periodo apenas progresaran. Únicamente podemos destacar dos hechos importantes: por un lado, la traducción de obras griegas a la lengua de aquella época. Lo más sorprendente es que si dichos textos contenían fallos matemáticos, se consideraban verdades matemáticas de la época. Y por otro lado, a Hipatia, la única matemática conocida en el medievo (370-415). Hipatia se educó en un ambiente académico y culto, dominado por la escuela neoplatónica alejandrina, y aprendió matemáticas y astronomía de su padre, quien además le transmitió su pasión por la búsqueda de lo desconocido.

Hipatia inventó el astrolabio (instrumentos para determinar las posiciones de las estrellas sobre la bóveda celeste) e inventó un densímetro, cosa que le dio prestigio. Se dedicó a la enseñanza de la filosofía, centrándose en las obras de Platón y Aristóteles. La casa de Hipatia se convirtió en un lugar de enseñanza donde acudían estudiantes de todas partes del mundo romano. Ninguna de sus obras se ha conservado, pero se conocen gracias a sus discípulos, sus obras fueron *Comentario a la Aritmética* en 14 libros, *Canon astronómico*, *Tablas astronómicas: revisión de las del astrónomo Claudio Tolomeo* y su obra más importante *Comentario a las Secciones cónicas*.

Se sabe que inventó un destilador, un artefacto para medir el nivel del agua y un hidrómetro graduado para medir la densidad relativa y gravedad de los líquidos. Murió apedreada por la multitud.

Eran tiempos difíciles y la ciencia no avanzaba.

4 Baja Edad Media

Mientras en Europa teníamos esta situación de "Oscurantismo", en Oriente otras acciones se llevaban a cabo: el imperio musulmán se dedicaba a conquistar y ganar tierras. Era el tiempo de las cruzadas, tiempos de guerra. En la Edad Antigua, los islámicos ya poseían casi todo el terri-

torio Oriental y avanzaban hacia Occidente. En el S.VII aparecieron en Europa.

Sin embargo, la llegada de los musulmanes no fue demasiado violenta para la cultura ya que ellos respetaban las esculturas, obras y estructuras de otras culturas enriqueciéndose con ellas. Eran más tolerantes con las sociedades sometidas. Así que la sociedad europea tuvo la oportunidad de conocer la sabiduría de otros territorios como China o India, e incluso, los conocimientos de los bizantinos quienes, hasta la llegada de los musulmanes, preservaban obras completas de la antigua Grecia.

La aparición de los musulmanes en Europa cambió la mentalidad de la época ya que ellos establecían una separación entre iglesia y ciencia. Los musulmanes empezaron a preocuparse por otros aspectos no religiosos incorporando así conceptos nuevos a nuestra escasa cultura. La creencia perdió fuerza. Como el territorio musulmán se extendía desde la península Arábiga hasta la actual China, se incorporaron los avances matemáticos de esas tierras a Occidente. Además, los musulmanes tradujeron textos matemáticos de griegos, babilonios, egipcios e indios, lo que hizo enriquecer los conocimientos del momento. Dos libros griegos fueron fundamentales para la civilización islámica: *El Almagesto*, de Ptolomeo, sobre Astronomía, y *Los Elementos de Euclides*, acerca de la Geometría. El primero, les enseñaba a orientarse por las estrellas y el segundo, a hacer dibujos que señalasen la dirección de La Meca desde cualquier parte de la Tierra.

Ya el año 900, se produjeron avances en las matemáticas, que parecían ya olvidadas, estudiando los resultados de otros antecesores. Los árabes extendieron el sistema indio decimal a las fracciones decimales. La primera figura destacada en la matemática árabe es Muhammad Musa Al-Khwarizmi (780-850) que nació en Khiva, parte de Uzbek, autor del libro de aritmética llamado *Al-jam' w'al-tafriq ib hisab al-hind* (adición y sustracción en aritmética hindú). En su obra se aprecia la influencia de los hindúes, los griegos y hasta de los babilonios. Gracias a su libro llegaron al mundo árabe las cifras hindúes y el cero. Pero su creación más importante es *Al-jabr wa'l muqabala*, cuyo título es el origen de la palabra álgebra. De hecho es considerado como el padre del álgebra y como el introductor de nuestro sistema de numeración. Destaca por sus problemas aplicados a la vida cotidiana del imperio islámico de entonces. Estudió la solución de ecuaciones lineales y cuadráticas. Lo curioso es que él no empleaba símbolos de ninguna clase sino sólo palabras. En aritmética describe el sistema indio de numeración posicional en base 10 y explica métodos para hacer cálculos con él. Introdujo este sistema en el mundo árabe y posteriormente se extendió

por Europa. Más adelante, el matemático Al-Karayi (953-1016) amplió este estudio a polinomios con un número infinito de términos. Este matemático escribió una obra sobre la aritmética de setenta capítulos, de los cuales los 16 últimos están dedicados al álgebra. En las ecuaciones cuadráticas utilizaba un método aritmético, sin utilizar los elementos de Euclides ni un método geométrico como se había hecho anteriormente. Trabajaba con procedimientos más generales y con ecuaciones cuyo coeficiente principal no tenía por que ser uno. Fue el primero que estudió las ecuaciones de grado superior reduciéndolas a cuadráticas bien por ser de la forma $ax^{2n} + bx^n = c$ o bien por $ax^{2n+m} + b^{n+m} = cx^m$. Empezó a estudiar el espacio \mathbb{Z}_9 sumando elementos de este cuerpo, lo que hacía era que si un elemento superaba el 9, le iba restando 9 hasta llevar a un número entre 0 y 8.

En el siglo XII, el matemático Omar Jayyam generalizó un método que provenía de la cultura india para poder calcular raíces cuartas, quintas y de grado superior. Entre sus obras destacamos títulos como *Disertación sobre una posible demostración del postulado paralelo de la geometría de Euclides*, *Tesis sobre Demostraciones de Álgebra y Comparación*, escrita en árabe (traducida por Woepecke en 1851), *Tratado sobre la exactitud del sistema Indio para calcular raíces de ecuaciones*, que trata sobre las ecuaciones de segundo y tercer grado, *Los Problemas en Aritmética y Cálculo*, *Descripción de las Tablas Astronómicas de Malek Shah* y *Problemas de Aritmética*, que es un libro de música y otro de álgebra. A pesar de tantas obras, sólo conservamos parte de su obra científica.

Antes de su gran tesis, Jayyam creó un escrito donde se planteó el problema siguiente *Encontrar un punto en un cuadrante de un círculo de tal manera que cuando una normal se deja caer desde el punto a uno de los radios de delimitación, la proporción de la longitud de la normal a ese radio es igual a la proporción de los segmentos determinados por el punto de intersección de la normal con el radio* y vio que era equivalente a solucionar el enunciado *Encontrar un triángulo rectángulo con la propiedad de que la hipotenusa sea igual a la suma de un cateto más la altura de la hipotenusa*. Este problema se traduce a resolver la ecuación cúbica

$$x^3 + 200x = 20x^2 + 2000$$

y encontrar la raíz positiva. Jayyam solucionó la ecuación considerando la intersección de una hipérbola rectangular y un círculo. Sin embargo, destaca más el hecho de que para hallar la solución usara las secciones cónicas y que dijera que las raíces cúbicas no se pueden encontrar mediante regla y compás (un resultado que fue probado 750 años más tarde). Además, estaba seguro de que las ecuaciones cúbicas tenían

más de una solución aunque no vio que podían tener 3, sólo demostró que había casos de ecuaciones cúbicas con dos soluciones. A pesar de saber que siempre era posible hallar la solución.

En su obra *Tratado sobre demostraciones de problemas de Álgebra* podemos encontrar una completa clasificación de ecuaciones cúbicas resueltas geoméricamente mediante la intersección de secciones cónicas:

Cubo de la cosa igual a número	$x^3 = c$
Cubo de la cosa más cosa igual a número	$x^3 + bx = c$
Cubo de la cosa más número igual a cosa	$x^3 + c = bx$
Cubo de la cosa igual a cosa más número	$x^3 = bx + c$
Cubo de la cosa más cuadrado de la cosa igual a número	$x^3 + ax^2 = c$
Cubo de la cosa más número igual a cuadrado de la cosa	$x^3 + c = ax^2$
Cubo de la cosa igual a cuadrado de la cosa más número	$x^3 = ax^2 + c$
Cubo de la cosa más cuadrado de la cosa más cosa igual a número	$x^3 + ax^2 + bx = c$
Cubo de la cosa más cuadrado de la cosa más número igual a cosa	$x^3 + ax^2 + c = bx$
Cubo de la cosa más cosa más número igual a cuadrado de la cosa	$x^3 + bx + c = ax^2$
Cubo de la cosa igual a cuadrado de la cosa más cosa más número	$x^3 = ax^2 + bx + c$
Cubo de la cosa más cosa igual a cuadrado de la cosa más número	$x^3 + bx = ax^2 + c$
Cubo de la cosa más número igual a cuadrado de la cosa más cosa	$x^3 + c = ax^2 + bx$

Observemos la cantidad de casos que distingue, cuando, hoy en día, sabemos que son equivalentes.

Omar Jayyam también destacó por ser el primero que describió el desarrollo de la potencia de un binomio con exponente natural, y que estableció, por primera vez, la idea de que las fracciones podrían con-

tener más propiedades más que las conocidas con los números naturales, único campo conocido entonces, y que databa desde los griegos. Sin embargo, debido a la situación del momento, sus aportes en las matemáticas no se comprendieron en toda su trascendencia. Algunas frases célebres de este gran matemático son *Vive plenamente mientras puedas y no calcules el precio* o *Si los amantes del vino y del amor van al infierno..., vacío debe estar el paraíso*. En su obra *Disertación sobre una posible demostración del postulado paralelo, de la geometría de Euclides*, demostró, sin quererlo, propiedades importantes de la geometría no euclidiana mientras intentaba probar el postulado de las rectas paralelas del famoso Euclides.

Jayyam también destacó en otros ámbitos como física, economía, historia, filosofía, metafísica y tradiciones.

Ibrahim ibn Sinan, que se dedicaba a estudiar geometría, investigó en el campo de áreas y volúmenes, así continuó el trabajo de Arquímedes. Además, algunos matemáticos como Kamal al-Din estudiaron problemas de óptica aplicando la teoría de las cónicas. Habas al-Hasib y Nasir ad-Din at-Tusi fueron matemáticos que se basaron en la función seno de los indios y el teorema de Menelao, y así crearon trigonometría plana y esférica, aunque éstas no se convertirían en disciplinas hasta la publicación del *De triangulis omnimodis* en el S.XVI. Finalmente, algunos matemáticos árabes lograron avances importantes en la teoría de números y crearon métodos numéricos para la resolución de ecuaciones.

La cultura estancada en la Temprana Edad Media empezaba a evolucionar. Pero no solo destacan autores musulmanes. Adelard de Bath (1090-1150 d.C) dedicó gran parte de su vida a viajar para recopilar información y realizar traducciones ayudando así a las matemáticas europeas. Teorizó que la materia no podía ser destruida y se planteó la interesante pregunta de por qué el agua experimentaba dificultades para salir fluyendo de un recipiente al que se daba la vuelta. Muchas de las demás cuestiones planteadas reflejaban la cultura popular de la época. Además tradujo las tablas de al-Jwārizmī y una *Introducción a la astronomía árabe*. Escribió un tratado corto sobre el ábaco. y tradujo *Los elementos de Euclides* al latín desde una traducción árabe del original griego. Parecía como si las matemáticas despertaran tras un largo sueño que duró siglos.

Durante el siglo XII, los conocimientos matemáticos crecieron gracias a las traducciones de muchos textos al latín. Así, en los países con esta lengua, la ciencia avanzó más que en otras zonas. Los responsables del crecimiento de las matemáticas en la Edad Media fueron los árabes y sus las traducciones de los griegos.

5 Alta Edad Media

A partir de 1200 d.C la sociedad de Europa sufrió cambios. Empezaron a surgir las universidades: centros públicos donde la sociedad podía ir a estudiar, a ser enseñada por otra persona más sabia, a culturizarse. Se creó así la figura del profesor: normalmente aquella persona que poseía una copia original de un libro antiguo y quien se encargaba de *descifrar* a sus alumnos el contenido ya que las copias de éstos, eran de menor calidad. La era de las traducciones. Se acabaron las interminables guerras: las cruzadas habían llegado a su fin. Desparecen así los señores feudales y todo el sistema territorial establecido en la Edad Media que tantos siglos había perdurado. El comercio resurgió más fuerte que nunca creando incluso un nuevo tipo de grupo social: la burguesía, personas dedicadas exclusivamente a la venta y compra de productos. Ellos más que nadie, necesitaban una buena base matemática para su negocio. La cultura volvió a surgir. En el siglo XII, los estudiosos europeos viajaron a España para buscar textos árabes de carácter científico, como por ejemplo, *Elementos de Euclides*, traducido en varias versiones por Adélarde de Bath, Herman de Carintia y Gerard de Cremona, considerados unos de los traductores más importantes de la época o, por ejemplo, el *al-Jabr wa-al-Muqabilah*, escrito por el matemático y astrónomo Al-Khwarizmi quien introdujo en Europa los numerales indoarábicos y los principios fundamentales del álgebra. Su obra *Kitab al-jabr wa al-muqabalah* fue traducida al latín en el siglo XII dando origen al término álgebra. En esta obra, él explica algunas reglas para poder tener la solución de ecuaciones lineales o cuadráticas. Otra publicación, de la que sólo se conserva su traducción al latín, es *Algoritmi de numero Indorum*, de donde apareció el termino que hoy en día conocemos como algoritmo.

Ya en los siglos XIII, XIV, XV aparecieron personajes distinguidos que dedicaron tiempo a las matemáticas como los italianos Leonardo Fibonacci y Luca Pacioli, muy importantes en el desarrollo del álgebra y la aritmética, y el mallorquín Ramon Llull, destacado en geometría y aritmética.

Leonardo de Pisa, también llamado Fibonacci, ya que el apodo de su padre era Bonacci, vivió desde el año 1170 hasta 1250. Su padre dirigía un puesto de comercio en Bugía (Pisa) y su hijo, desde pequeño, siempre le acompañaba. Así, aprendió el sistema de numeración árabe. Éste lo difundió por Europa de tal manera que actualmente es el sistema que utilizamos. Este método emplea notación posicional, es decir, en base 10 o decimal, y un valor nulo: el cero. Fibonacci es famoso también por la sucesión que lleva su nombre.

En 1202 publicó un libro de lo que había aprendido, *Liber Abac*, el libro del ábaco o libro de los cálculos. Éste mostró la importancia del nuevo sistema de numeración aplicándolo a la contabilidad, conversión de pesos y medida, cálculo, intereses, cambio de monedas, etc. Además, describe el cero, la notación posicional, la descomposición en factores primos y los criterios de divisibilidad. Este libro tuvo un gran impacto en el pensamiento matemático europeo. Además de todo esto, Fibonacci dio a conocer en occidente los métodos matemáticos de los hindúes.

En el año 1225, un matemático de la corte de Federico II propuso un desafío a Fibonacci: *encontrar un cuadrado tal que si se le sumaba o restaba el número cinco diera como resultado en ambos casos números cuadrados*. Consecuencia de esto, Fibonacci publica su cuarto y principal libro: *Liber Quadratorum* (el libro de los Números cuadrados). Curiosamente, el año de publicación es un número cuadrado, en el que se da solución a este problema.

Destacamos también a Nicole Oresme (1323-1382 d.C.) quien con su obra *Proportionum Algorismis* trató la notación y el cálculo de exponentes fraccionarios aunque su obra nunca se llegó a publicar.

Fray Luca Bartolomeo Pacioli (1445-1517), también conocido como Luca di Borgo San Sepolcro, tuvo una infancia de pobreza y nunca pudo ir a la escuela, pero al estar en contacto con artesanos y mercaderes pudo aprender lo que en aquella época se conocía como matemáticas comerciales. Ingresó joven en la orden religiosa y se dice que fue para poder tener acceso a libros y no por su vocación de monje.

Su obra más importante es *la Summa de arithmetica, proportioni et proportionalita* que es considerada como la primera enciclopedia de matemática pura y aplicada, también se puede considerar una recopilación de la matemática de su tiempo. En este relato demuestra los diferentes resultados matemáticos con la enumeración indo-arábica. Tuvo la gran suerte de hacerse amigo de Leonardo da Vinci, quien ilustró sus libros. Posteriormente, decidió explicar los *Elementos de Euclides* en la universidad y traducirlos al latín y al italiano.

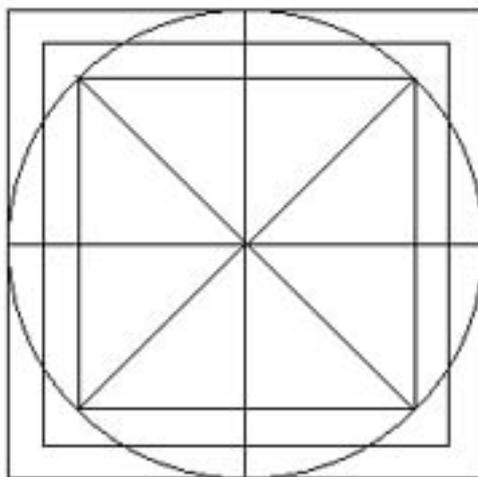
A Pacioli no se le puede considerar un gran descubridor matemático puesto que no incluyó nuevos resultados. Su gran labor fue escribir matemáticas en lengua vulgar y explicar las matemáticas de forma fácil de entender para todo el mundo. Esto lo consiguió mezclando los argumentos matemáticos con anécdotas y experiencias vividas. En *la Divina proportione* demostró que las matemáticas estaban muy relacionadas con la belleza y la simetría, en cambio en *De viribus quantitatis* intentó demostrar que las matemáticas podían ser divertidas. Una de sus frases

fue la ciencia matemática se debe entender como la suma de aritmética, geometría, astrología, música, perspectiva, arquitectura y cosmografía.

Ramon Llull (1232-1316) fue la gran figura mallorquina del S.XIII no sólo por su contribución en las matemáticas, sino por toda su obra en general: desde literatura catalana hasta la formación de misioneros en monasterios para que aprendieran diversas lenguas. Los grandes objetivos de Llull fueron tres: escribir *El mejor libro del mundo* que convirtiese a los infieles, crear monasterios para la enseñanza y convertir a los musulmanes, además de querer crear un sistema teórico (lógico) válido para cualquier ciencia.

Con el fin de alcanzar sus metas, Llull estudió árabe, latín, teología y filosofía y realizó diversos viajes por el mundo. Gracias a ello, escribió obras en latín, árabe e incluso en catalán. Tan obsesionado estaba por escribir *El mejor libro del mundo* que realizó varias versiones durante más de 30 años hasta llegar al *Ars generalis ultima*.

En el ámbito matemático, se conoce a Llull por crear un lenguaje simbólico basado en las letras del alfabeto que combinaba entre sí. De hecho, este mismo lenguaje fue el que, años más tarde, usaría Leibnitz como base de su sistema universal de notación. Sin embargo, Llull aplicaba más de una vez los sentidos a sus observaciones, hecho que le provocaba caer en el error más de una vez. Por ejemplo, existe un manuscrito sobre la *Geometría Nueva de Llull* que no contiene ninguna demostración pero que sí incluye algún resultado entre ellos, la cuadratura del círculo. Creó la siguiente figura compuesta por tres cuadrados y un círculo:



Según Llull, el cuadrado intermedio dista igual del cuadrado mayor que del menor, por lo tanto, gracias a los sentidos (no demuestra nada)

el área del cuadrado intermedio es igual al área del círculo. Él concluye que puede cuadrar cualquier círculo encontrando el correspondiente cuadrado intermedio.

A Ramon Llull se le considera uno de los matemáticos más influyentes del medievo aunque con reservas puesto que, como hemos visto anteriormente, sus conocimientos matemáticos no eran del todo acertados ya que se basa en una intuición visual y comete errores importantes como el de creer que cuadra un círculo.

En el medievo también se evolucionó en otros campos como la astronomía: La Tierra, y con ella el hombre, dejaron de ser el centro del Universo. Copérnico, Kepler, Galileo... van a poner las bases de una nueva manera de ver el mundo.

Los siglos XV y XVI van a ser testigos de una gran Revolución Científica.

6 Consecuencias

La edad media tuvo muchos altibajos respecto a la ciencia y, por supuesto, respecto a las matemáticas. Éstas tuvieron inicialmente un periodo, digámosle "oscuro", ya que la sociedad se preocupaba más por la comida y la supervivencia que por estudiar, y solo se dedicaban a la cultura los monjes. A medida que fueron pasando algunos siglos, empezaron a aparecer algunos matemáticos, aunque ninguno destacable hasta llegar a autores como Luca Pacioli y Fibonacci, que se podría decir que fueron los grandes matemáticos europeos de la época. Pacioli intentó que las matemáticas pudieran ser aprendidas por toda la sociedad y hacerla más divertidas, en cambio Fibonacci se dedicó a investigar sobre temas ya expuestos y consiguió demostrar numerosos resultados.

A partir del siglo XV, Europa empezó a recuperarse. La población empezó a crecer, gracias a la disminución de las guerras y la desaparición de las epidemias que se habían expandido por el continente durante el siglo anterior. El sector agrícola empezó a crecer gracias al incremento en la población y la aparición de mejoras en los arados y en los sistemas de irrigación. Esto, conllevó a un aumento de las actividades comerciales y de las manufacturas. Todo esto llevó al Renacimiento (XV-XVI). Esta nueva etapa de la historia llevó a una nueva forma de ver el ser humano y el mundo. El Renacimiento solo se desarrolló en la cultura europea y en los territorios americanos recién descubiertos. En esta época se consolidaron los Estados Europeos y los viajes transoceánicos (gracias a ellos hubo contacto entre Europa y América). También provocó la descomposición del feudalismo apareciendo la bur-

guesía como la revolución del capitalismo.

Tenemos que destacar un hecho importante, que fue la aparición de lo que hoy en día llamamos álgebra. La palabra álgebra apareció a manos del autor Muhammad Musa Al-Khuwarizmi (780-850) con su obra *Sobre el cálculo mediante la restauración y la reducción*, que fue el primer tratado algebraico. A medida que pasaba este periodo de tiempo, se fue creando lo que hoy conocemos como álgebra, muchos de los resultados que hoy consideramos básicos de la álgebra, se descubrieron en esa época.

También se tiene que destacar la aparición de las primeras universidades, esto llevó a que cada vez aparecieran mas y cogieran prestigio, la gente empezó a interesarse en ir a la universidad y en el aprendizaje.

Anteriormente a la Edad Media, ya había aparecido el número 0, mejor dicho, había aparecido el significado que hoy le damos al cero, pero hasta el 810 d.C. aproximadamente, no apareció el símbolo del cero. Abu Ja'far Mujammad ibn Musa, en su obra titulada *Tratado de la adición y la sustracción mediante el cálculo de los indios* explica el principio de numeración posicional decimal, señalando el origen indio de las cifras. La décima figura, que tiene forma redondeada, es el *cero*. Por tanto, la consecuencia principal de esto, fue la enumeración que tenemos hoy en día.

Bibliografía

- <http://divulgamat.ehu.es/weborriak/historia/Historiamatindex.asp>
- *Doc. Matematicas medievales* Fonts Documento en pdf adjunto.
- http://soko.com.ar/historia/Historia_matem.htm
- <http://carlosbruni.tripod.com/matematicasmedia.html>
- <http://www.edadantigua.com/edadmedia/edadmedia.htm>
- <http://paraisomat.ii.uned.es/paraiso/historia.php?id=inmate>
- <http://e-ciencia.com/blog/divulgacion/azulejos-arabes-medievales-dibujados-con-matematicas-de-hace-30-anos/>
- <http://www.cienciapopular.com/n/Ciencia/LosNumeros/LosNumeros.php>
- <http://estudiosmedievales.revistas.csic.es/index.php/estudiosmedievales/article/view/187/190>

- http://www.portalplanetasedna.com.ar/matematicos_e_dadmedia.htm
- <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Khayyam.html>
- <http://divulgamat.ehu.es/weborriak/historia/MateOspetsuak/Jayyam.asp>
- <http://www.juntadeandalucia.es/averroes/14700596/departamentos/islammat.htm>
- http://www.matematicas.profes.net/archivo2.asp?id_contenido=35258