Riemann

Alejandro García Pachón
Lucía Rotger García

1 Introducción

Varios son los casos de matemáticos, a lo largo de la historia, que con una vida no muy longeva fueran muy productivos en lo que se refiere a descubrimientos y resultados. El más conocido es quizás el de Évariste Galois, que murió con apenas 21 años, habiendo hecho trabajos y resultados muy importantes en el campos del álgebra.

Pero en este trabajo trataremos el caso de Bernhard Riemann. Murió antes de cumplir los 40 años pero hizo grandes contribuciones en diferentes campos de las matemáticas: en análisis complejo estudió las funciones de una variable, revulocionó la geometría analizando la negación del quinto postulado de Euclídes, dentro del cálculo definiendo las conocidas integrales que llevan su nombre, entre otros campos. También trabajó en áreas de la física como la dinámica de fluidos, magnetismo, teoría de gases, etc.

Todos estos trabajos y resultados nos muestran las gran productividad que tuvo Riemann. Pero ¿Por qué es importante en la acutalidad?¿Por qué es tan conocido? Veremos como la integral de Riemann, la geometría riemanniana y la conjetura de Riemann supusieron un gran avance para las matemáticas en el momento en que se desarrollaron. Estos conceptos se incorporaron a las bases de la matemática actual, y son fundamentales para la investigación tanto en matemáticas, como física, incluso se incorporaron al arte.

Por eso veremos los datos remarcables de su vida y explicaremos los tres resultados mencionados, tanto sus definiciones como aplicaciones, y en el caso de la conjetura de Riemann también los intentos de demostrarla, los cuales han sido infructuosos, y dejan al problema como uno de los más importantes por resolver en la actualidad, premiando al autor de su demostración con 1 millón de dolares.

2 Biografía

Bernhard Riemann nació en 1826 en Breselenz, en el Reino de Hanover, lo que hoy en día seria Alemania. Su padre era un pastor luterano de la misma ciudad, quien luchó en las guerras napoleónicas, y su madre murió antes de que él alcanzara la edad adulta. Era el segundo de seis hermanos. Tenía un carácter tímido y con normalidad sufría de ataques de nervios. Esta personalidad le condicionó a la hora de hablar en público, ya que su timidez y miedo escénico lo impedía, pero por otro lado mostraba unas cualidades para las matemáticas y habilidades de cálculo desde muy joven.

La influencia de su padre fue notable en el transcurso de su vida académica. En 1840 se fue a vivir con su abuela a Hanover, donde asistió al *Lyceum*, entrando directamente en el tercer curso. Tas la muerte de su abuela en 1842 entró al Johanneum Lüneburg, donde trabajaba duro en asignaturas clásicas como hebreo y teología. Es por ello que durante esta época, Riemann estudió la Bíblia de forma intensiva, seguramente por la influencia de su padre sobre él, pero de vez en cuando se distraía con las matemáticas, llegando al punto que intentó probar matemáticamente la exactitud del Libro del Génesis.

Sus profesores estaban sorprendidos por la capacidad que tenía de realizar operaciones matemáticas de cierto dificultad de forma eficiente, en los que a menudo superaba a los conocimientos de su profesores. Viendo el interés del joven por las matemáticas, el director le presta un libro sobre la teoría de los números de 900 páginas, y 6 días después le pregunta qué tal le parece el libro, a lo cual Riemann le contesta que ya lo había acabado y le había fascinado.

En 1846, cuando contaba con 19 años, comenzó sus estudios en filología y teología con la intención de seguir los pasos de su padre, convertirse en sacerdote, y así poder contribuir en las finanzas familiares, pero durante la primavera de ese mismo año, su padre ahorra suficiente dinero como para enviarlo a la universidad. Esto permitió que dejara los estudios en teología y pudiese empezar sus estudios en Matemáticas.

La universidad a la que asistió fue la Universidad de Göttingen, donde conoció a Carl Friedrich Gauss, y asistió a sus conferencias sobre el método de los mínimos cuadrados. Más tarde, en 1847, se mueve a Berlín, donde Jacobi, Dirichlet, Steiner y Eisenstein daban clase. Permanece dos años en Berlín, en los cuales llegó a ser reclutado por las milicias de estudiantes y ayudó a proteger al rey en su palacio de Berlín durante las manifestaciones y movimientos obreros de 1848. Vuelve a Göttingen en 1849.

En 1851 se doctora, con una tesis que fue elogiada por Gauss, en la que estudia la teoría de las variables complejos y lo que hoy denominamos superfícies de Riemann. Fue en 1853 cuando el mismo Gauss le propuso que preparase una *Habilitation* sobre las bases de la geometria, que es el mayor reconocimiento que puede obtener un alumno, y consiste en escribir una tesis profesional, conocida como *Habilitationsschrift*, que debe defender frente a un comité académico en un proceso similar al de la tesis doctoral, sólo que el nivel exigido debe ser considerablemente mayor tanto en calidad como cantidad, y debe hacerlo de forma independiente. Después de varios meses, Riemann desarrolla su teoría de las grandes dimensiones.

En 1854 tiene lugar su lectura con el entusiasmo del público matemático, con el título *Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen*. A partir de este trabajo, se construye la geometría de Riemann.

Finalmente, en 1857, hubo un intento de promover a Riemann como profesor extraordinario en la Universidad de Göttingen, que a pesar de ser fallido, dió lugar a que Riemann se le concediera un salario regular. Dos años más tarde también es promovido para encabezar el Departamento de Matemáticas tras la muerte de Dirichlet, el cual había obtenido su cátedra tras la muerte de Gauss en 1855.

Forma una família al casarse con Elise Koch y tener una hija en 1862, pero su reciente posición laboral y familiar dura poco al morir en 1866, tras huir de Göttingen por la lucha entre la armada de Hanover y Prusia en la ciudad, y contraer tuberculosis. La muerte le llegó durante su viaje a Italia, donde fue enterrado.

Su huida de Göttingen, junto con su muerte en el extranjero hizo que dejase trabajo incompleto. Su ama de llaves, tras su muerte, ordenó la mesa de su oficina de casa, en la que se incluían muchos trabajos sin publicar, ya que Riemann se negaba a publicar trabajo incompleto y puede que se perdieran algunas de sus ideas más profundas.

3 Obras

Muchas son las aportaciones de Riemann a las matemáticas que son utilizadas actualmente, veremos algunas importantes que nos daran pie a explicar la conjetura que lleva su nombre.

3.1 Integral de Riemann

Riemann publica en 1854 su obra *Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe* para poder acceder al cargo de profesor auxiliar en la universidad de Göttingen. Se define por primera vez el concepto de integral de Riemann y se inicia la teoría de funciones de una variable real.

Este tipo de integral se define como la suma finita de áreas de rectangulos. Éstos se definen en base a una partición de un intervalo $[a, b]$ donde se quiere calcular la integral, como altura de los rectángulos hay varias opciones, el máximo o mínimo de la función en el subintervalo o cogiendo el valor de la función en los extremos del mismo.

Entonces la integral S es igual a esta suma, si para cualquier par-

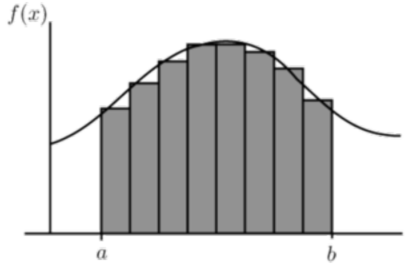

Figura 1: Ejemplo del cálculo de una integral de Riemann.

tición con subintervalos más pequeños que δ, se cumple que $\mid S - \sum_{i=1}^{n} a(r_i) \mid < \epsilon$. Es decir al aumentar el número de rectangulos la suma de sus áreas aproxima mejor el área de la integral.

La aplicación de la integral definida de Riemann es principalmente el cálculo de áreas planas delimitadas por una función y el eje x $\int_a^b f(x)dx$. El cálculo de volúmenes de revolución, es decir un recinto limitado por las rectas $x = a$, $x = b$ y la gráfica de la función de forma que $V = \pi \int_a^b (f(x))^2 \, dx$. También se puede calcular la longitud de una curva $L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$

Otras aplicaciones de la integral de Riemann se pueden encontrar el cálculo de distribución de masas y momentos en una barra, energía distribuída, dinámicas de calentamiento, enfriamiento y movimiento, aproximaciones de funciones por polinomios, etc.

3.2 Geometría de Riemann

Riemann, en su trabajo *Ueber die Hypothesen, Welche der Geometrie zu Grunde liegen* de 1854, encontró la forma correcta de extender en n dimensiones la geometría diferencial de superfícies, el cual Gauss demostró en su *theorema egregium*.

Este tipo de geometría surje como una generalización abstracta de la geometría diferencial de superficies en $\mathbb{R}^3$. Como casos particulares aparecen las geometrías no euclideanas (hiperbólica y elíptica) y la euclideana. De hecho, con el objeto básico llamado tensor de curvatura de Riemann, el cual para el caso de una superfície se puede reducir a un número, si es diferente de 0 o constante estaremos en modelos de geometría no euclidiana.

Se trata de estudiar las variedades diferenciales con la métrica de Riemann para poder obtener nociones locales de ángulos, longitudes de curva y volúmenes, entre otras magnitudes, sin hacer referencia a como se sitúa la superfície en el espacio tridimensional.

La aparición de esta nueva geometría fue acogida con gran entusiamo entre la comunidad matemática ya que suponía un cambio de mentalidad respecto a la geometria clásica euclidiana. Durante 2000 años, se consideraban solamente figuras en 2 o 3 dimensiones, pero Riemann abrió la posibilidad de considerar dimensiones superiores, con las consecuencias que ello conllevaba para la ciencia.

Entre otras aplicaciones, esta geometría se puede aplicar a problemas de topología diferencial y a la teoría de la relatividad de Einstein. Este último utilizó la geometría de Riemann tetradimensional para explicar la creación del universo. Los físicos, a finales del siglo pasado, utilizarían la geometría decadimensional para intentar unir todas las leyes y fuerzas del universo, añadiendo una dimensión más en sus estudios actuales.

3.3 Hipótesis de Riemann

Riemann tambien contribuyó en la moderna teoría de números. En el único escrito que publicó sobre teoría de números, introdujo sus funciones zeta y indicó su importancia para entender la distribución de los números primos. Hizo una serie de conjeturas sobre propiedades de estas funciones zetas, una de las cuales es conocida como la hipótesis de Riemann.

La hipótesis es una conjetura sobre la distribución de los ceros de la función zeta de Riemman $\zeta(s)$. Esta función está definida sobre valores reales mayores que uno:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

En la región del plano complejo con parte real mayor que uno, es una serie convergente definiendo una función analítica. Riemann observó que se puede extender a todo el plano complejo con un sólo polo en $s = 1$, en este caso se adopta la función funcional

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s)\zeta(1-s)$$

donde Γ es la función Gamma de Legendre. Los ceros triviales de la función se ve que son claramente los números pares negativos, los no triviales son lo que se intentan identificar en la conjetura, la cual afirma que:

La parte real de todo cero no trivial de la función zeta de Riemann es $\frac{1}{2}$

En 1859 Riemann publica el artículo *Sobre los números primos menores que una magnitud dada* donde se desarrolla una fórmula explícita para calcular la cantidad de números primos menores que un número dado y se menciona por primera vez la hipótesis. No intenta la demostración ya que no era el objetivo principal del artículo. Aun así sabía que los ceros no triviales de la función están distribuidos en la recta $s = \frac{1}{2} + \imath t$, que se denomina recta crítica, y además cumplían que $0 \leq \Re(s) \leq 1$.

La importancia de encontrar los ceros de esta complicada función es determinar la distribución de los números primos. Resulta que estos ceros y los números primos satifacen ciertas propiedades en común, que cuando se interpretan bajo herramientas de más alto nivel como el análisis de Fourier, muestran que los ceros pueden interpretarse como frecuencias en la distribución de los números primos.

El hecho de que Riemann dejase sin demostrar esta conjetura, y viendo la importancia de este resultado, dio lugar a que Hilbert lo incluyera en su famosa lista de 23 problemas no resueltos, durante una conferencia en 1900. Como anécdota resaltar que era tal el interés de Hilbert por este problema, que cuando le preguntaron qué haría si se despertara habiendo dormido quinientos años, respondió que lo primero por lo que se interesaría sería si la hipótesis de Riemann había sido probada.

Como vemos, la demostración de este conjetura obtiene desde un principio una relevancia considerable, por lo que es evidente que quien pruebe la hipótesis obtendrá fama y reconocimiento por toda la comunidad matemática. Por este motivo han sido muchos los intentos y demostraciones dadas a lo largo de estos 150 años, pero con un mismo resultado: ninguna demostración dada hasta la fecha ha sido correcta.

Algunos ejemplos de demostraciones no válidas sería el caso de Stieltjes, en 1885, cuando publicó una nota afirmando haber demostrado la conjetura de Mertens, el cual es una conjetura más fuerte que la de Riemann, por lo que ésta quedaría demostrada. Sin embargo, esta demostración jamás fue publicada, y tras la muerte de Stieltjes no se encontraron los documentos que lo afirmasen. Por otra parte, la conjetura de Mertens se demostró más tarde que era falsa, lo que invalidaba la afirmación de Stieltjes.

En 1940, Rademacher intenta demostrar que la hipótesis de Riemann es falsa, siendo publicado el artículo en la revista *Time*, aún después de que se encontrara un error en sus razonamientos, lo que invalidaba también esta afirmación.

Otros ejemplos de demostraciones menos formales se basan en encontrar los ceros numéricamente. Esto no demostraría la certeza de la hipótesis, pero podría encontrarse un cero que no estuviese en la recta crítica, lo que supondría un contraejemplo y probaría que la hipótesis es falsa.

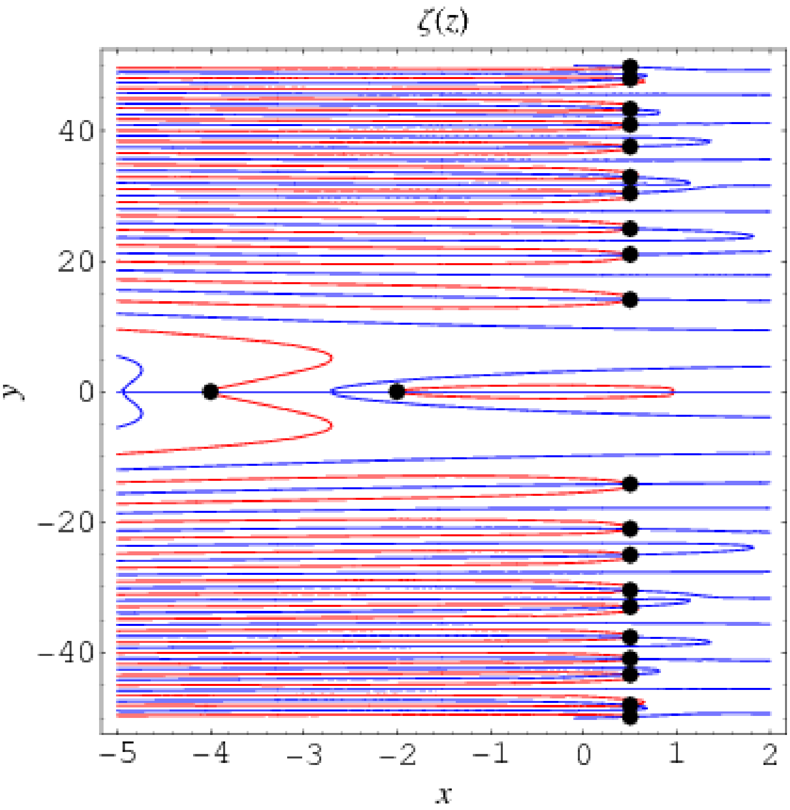

Figura 2: Se observan ceros no triviales, todos ellos en el eje crítico, y algunos ceros triviales en el eje x.

Se sabe que Riemann encontró 3 ceros no triviales, y casi 100 años después de publicarse la conjetura, el número de ceros conocidos se situaba en 1104, encontrados los últimos por A. M. Turing en 1953. A partir de aquí, con el inicio de la ciencia de la computación, el número de ceros encontrados aumentó exponencialmente, llegando a los 3'5 millones en 1968, pasando por los 1.500 millones en 1986 y llegando en 2004 a los 10 billones de ceros, todos ellos en la recta crítica, satisfaciendo la hipotesis de Riemann.

4 Conclusiones

Después de ver la integral, geometría y conjetura de Riemann, nos damos cuenta de porque hoy en día su nombre está estrechamente ligado a las matemáticas. Riemann se cuestionó que la geometría de Euclídes, con su simplicitud, pudiese explicar la complejidad de la naturaleza, y eso le hizo romper con los límites de la geometría establecidos durante 2 milenios. Einstein quedó asombrado cuando, al tener en sus manos la conferencia de Riemann de 1854, se dio cuenta que esas líneas se hallaba la llave para que naciese el principio de la relatividad general.

Con la integral de Riemann hemos visto su importancia en cuanto a poder calcular áreas y volúmenes, distribuciones de masas, aproximaciones de funciones por polinomios, etc.

Pero si por algo el nombre de Riemann resuena más en los últimos años ha sido por su famosa conjetura. En la última década, el interés por encontrar una demostración se ha acentuado, ayudado en parte por el millón de dólares que recibirá el autor de tal demostración, siendo uno de los problemas del milenio. Que se encontrase la demostración que le faltaba a la conjetura de Poincaré, problema resuelto por Perelman, en el último lustro avivó más ese interés.

El último intento de encontrar una demostración la encontramos en la persona de Li Xian-Jin, matemático del Brigham Young University, en Estados Unidos. Subió a la red un archivo diciendo ser la demostración de la hipótesis, en 2008, pero se ha encontrado con las críticas entre otros de dos ganadores de la Medalla Fields, los cuales le ha reportado fallos en la demostración. Actualmente, Li ha corregido algunos fallos, pero parecer ser que los que quedan la invalidan.

La demostración parece estar en el aire. ¿Estamos cerca de leer en los periódicos, páginas web, noticiarios, que ha sido hallada? Quien sabe, pero lo que si es cierto es que la comunidad matemática no escatima esfuerzos por descubrirla.